科學教育學刊 Chinese Journal of Science Education
2002，第十卷第三期，233-259 2002，10(3)，233-259

從教學活動中幫助國小六年級學生發展數字常識之研究

楊德清
國立嘉義大學數學教育研究所

（投稿日期：民國 90 年 6 月 7 日，修訂日期：91 年 3 月 26 日，接受日期：91 年 4 月 29 日）

摘要：臺灣南部二所（A 校與 B 校）公立國民小學各選取 1 個六年級之班級參加本教學實驗之研究。數字常識紙筆測驗經由 T-考驗結果顯示兩校學生在教學後之成績皆顯著地優於教學前之表現（$p < 0.01$）；同時保留測驗之成績亦顯著地優於教學前之表現（$p < 0.01$），但教學後與保留測驗不具顯著差異性。此正顯示數字常識教學具良好之成效，且學生具良好的保留概念，代表此學習是理解的，與有意義的學習。12 位（每班各 6 位學生）接受訪談學生在教學前之回答少有數字常識策略呈現，大都傾向於使用傳統算則的方式解決問題或無法解釋，由於解題之思考模式侷限於公式與計算法則，因此無法有意義的產生結果。然而教學後（B 校低程度學生除外），學生之反應與解釋明顯地呈現了使用數字常識策略的能力，如比較數字大小之能力，發展運用參考點之能力，或估算之能力等。在本教學實驗下，學生數字常識能力之成長是明顯的。

關鍵詞：數字大小、估算、參考點、數字常識教學。

壹、前言

近幾年許多先進國家所發表之研究報告均要求改革學校的數學教育，特別強調對兒童數字常識（Number sense）能力之發展的關心與重視（Australian Education Council, 1991; Cockroft, 1982; Emanuelsson & Johansson, 1996; Japanese Ministry Education, 1989; National Council of Teachers of Mathematics, [NCTM], 1989, 2000; National Research Council, 1989）。他們特別重視學校數學課程中數字常識的教學和強調學生應發展良好的數字常識。誠如美國數學教師協會（NCTM, 2000）所發表之「學校數學課程之原則與標準」（The Principles and Standards for School Mathematics [PSSM]）中數與計算標準所強調的「本標準之中心乃在發展兒童數字常識之能力」(p. 32)。這使得許多國家將「數字常識」視為 21 世紀數學教育中重要的教學主題之一，同時設計數字常識教學活動亦被視為發展小學數學課程之主軸與中心。

我國自民國 82 年起，以根本建構論為基

礎架構國民小學數學新課程，並自民國 85 年起逐年以新課程取代舊課程。同時目前正如火如荼積極進行九年一貫統整課程的大改革，此亦包括了數學教育教與學之巨變。值此重要之數學教育改革轉戾點之當兒，代表理解、生活化與意義化的學習數字之「數字常識」這個主題卻未曾出現或被討論於新數學課程或九年一貫數學學習領域中，是值得深思的。同時數學學習領域之能力指標強調解決問題的能力，主張數學生活化，其精神與內涵和數字常識之意義相一致（徐俊仁和楊德清, 2000）。如果我們欲進行重要且積極之數學教育改革，則數字常識教學在小學數學教育中應扮演極為重要之角色，同時亦應思考如何發展良好之數字常識教學活動以融入國小數學課程中以幫助兒童架構良好之數字常識。

基於這個動機，本研究之主要目的乃在探究研究者將設計良好之數字常識教學活動實施於國小六年級教室對兒童數字常識發展之成效為何？

貳、文獻探討

一、何謂數字常識？

數字常識並不是一個有限的實體而是一種複雜且多變化之學習過程，它會隨著經驗得累積與知識的成長而逐漸發展（Reys, 1994）。數字常識（楊德清, 1997, 2000b, 2000c; McIntosh, Reys, & Reys, 1992; Resnick, 1989; Reys & Yang, 1998; Sowder, 1992a, 1992b; Treffers, 1991）可以解釋為個人對數字、運算、以及數字和運算所產生之情境的一般性理解與認知，以及能夠以彈性靈活的方法去使用這種理解和發展有效的解題策略（包括心算、估算）以處理日常生活中包含數字和運算之情境的相關問題。

基本上而言，數字常識是一種概念，亦是多種能力的組合。所謂概念即是對數字與運算符號之意義的理解，這種理解已儲存於長期記憶區，當有需要時，便可自動自長期記憶區取出使用。

Reys（1994）認為數字常識是學習者能夠將新訊息與先前所獲得的經驗做邏輯性的連結，而更重要的是，驅使學習者有形成這種連結的能力。而 McIntosh 等（1992）亦認為具備比較數字大小的能力便是理解一個數字對應於其他數字時的對應關係，以及了解該數字本身所代表的意義之能力，此種能力會伴隨著對數學的成熟與經驗而發展。事實上，數字常識包含了運用參考點的能力，比較數字大小的能力，發展估算、心算的能力，判斷運算結果的合理性等等。因此數字常識是多種能力的組合

二、數字常識的內涵

“數字常識”對數學課程而言是一個相當新的名詞，然而它強調理解和有意義的學習在數學教育的文獻與研究報告中卻是很普遍而常見的(Altizer-Tuning, 1984; Bezuk & Cramer, 1989; Brownell, 1935; Burns, 1994; Hiebert, 1984; Kamii, 1989; 1994; NCTM, 1989,2000; Plunkett, 1979)。雖然從字面上來看數字常識，感覺似一般常識，當深入地探究其內涵時，卻發現它是一個複雜的程序包括了數、運算、與數和運算所產生之情境的多種複雜組合。它的特徵與組成元素已被許多文獻與研究報告從哲學、心理、教育、與數學等不同的層面詳細地分析與探討(楊德清, 2000b; Greeno, 1991; Hiebert, 1989; Howden, 1989; McIntosh *et al.*, 1999; NCTM, 1989, 2000; Resnick, 1989; Reys *et al.*, 1991; Sowder, 1992a, 1992b)。這些研究與討論已發展有用的數字常識理論架構，誠如美國數學教師協會 PSSM（NCTM, 2000）之陳述「數字常識–能夠很自然地分解數字，使用特別的數字如 100 或 1/2 當作參考點，運用算術運算間之關係以解決問題，瞭解十進位數字系統，具估

計能力，意義化數字，以及認知數字之相對與絕對的大小」(p. 32)，此已將數字常識的內涵描述的淋漓盡致了。

三、數字常識的組成成份

基於研究的需要，本研究參考相關之文獻（楊德清, 2000b, 2000c; McIntosh *et al.*, 1999; NCTM, 1989, 2000; Sowder, 1992a, 1992b; Yang, 1995）將數字常識的組成成份定義如下：

(一)瞭解數字的基本意義

瞭解數字的基本意義包括：理解數字系統（整數、分數、小數），它所表的意義以及它的結構關係，包括十進位系統、數字型態、與位值觀念。從我們每天必須面對的事物 時間、金錢、日期等等，乃至宇宙萬象、星象運行、壽命等皆與數字有關，由此可知數字於我們的生活中佔有很重要的地位。因此瞭解數字的意義與能夠彈性地運用數字關係是發展數字常識之重要基礎（McIntosh, Reys, & Reys, 1992; Sowder & Schappelle, 1989）。

(二)比較數字大小的能力

認知數字大小的能力包括能夠比較數字（包含整數、分數、與小數）之大小，例如：知道$\frac{2}{3}$大於$\frac{1}{2}$，或能分辨 5.6 大於 5.5988；能夠判斷兩個數字之中哪一個較接近第三個數字，例如：知道$\frac{1}{2}$較接近$\frac{3}{10}$或$\frac{3}{4}$；有能力去排序數字，能夠由小至大依序排列：0.4899，$\frac{4}{5}$，$\frac{8}{15}$，$\frac{19}{18}$，0.91；以及知道兩個數字之間有無限多的分數或小數的存在，例如：知道 0.83 與 0.84 之間有無限多的小數與分數。

(三)瞭解運算對數字的意義和影響之能力

認知運算對數字的影響即是瞭解運算在不同的數字系統下（包括整數與有理數）以及不同情境下所產生之影響。當學生在面臨四則運算的數學問題時，他必須能對每一特定的問題情境發展如何去解決問題的策略或方法，到底是加、減、乘或除的心理表徵。NCTM（1989）強調，運算的理解涉及到關於兩個數字運算影響的洞察和直覺。例如，兒童應該可以了解，當兩個數字相加時，如果每一個數字都超過 50，那麼它們的和一定會比 100 大。

(四)發展並靈活運用參考點的能力

參考點（Benchmark）乃是指可依賴以作為檢驗其它數字或解決問題之標準點。例如：以 1 為參考點，知道$\frac{17}{18}$小於 1 但是很接近 1；當要求學生估計全校的人數時，兒童能夠發展適當的參考點，如以本班人數或年級人數為參考點，進而求出全校學生的人數。McIntosh, Reys, & Reys (1992)認為：參考點通常可以被使用於判斷一個答案的大小或者選擇一個約略數字以便於估算或心算的進行。

(五)發展估算策略，以及能夠判斷運算結果之合理性

學習數學的主要目的之一乃在解決問題，因此在不同的情境下，必須決定問題情境需要的是正確的或大概的答案，並據以選擇適當的計算工具（如估算或心算），以有效的解決問題，同時能夠檢驗運算結果的合理性。

四、為什麼幫助兒童發展數字常識之能力是很重要的？

NCTM（2000）之 PSSM 主張「瞭解數字和運算，發展數字常識，.. 等等形成小學數學教育的核心」(p.32)，其重要性益加顯著。許多著名的研究（楊德清, 2000b; Burn, 1994; Carpenter *et al.*, 1982; Markovits & Sowder, 1994; Reys & Yang, 1998; Threadgill-Sowder, 1984）也證實絕大多數的學生當他們在處理數字問題的情境時並不瞭解其所做為何？往往是知其然而不知其所以然？例如，Yang（1995）的研究即發現當要求學生去找出 534.6 × 0.545＝291357 之小數點的位置時，只有大約 11%的 6 年級學

生可以找出小數點的正確位置；但是超過 60% 的學生可以使用紙筆計算的方式正確的找出此複雜的計算題。楊德清（2000b）進一步的研究訪談 21 位小六學生（包括成績最好的學生），結果發現沒有一位學生可以使用數字常識的概念以正確的解釋其答案。他們共同的解釋為「第一個數字（被乘數）有一位小數，第二個數字（乘數）有三位小數；相乘的結果有 1＋3＝4 位小數，因此 291357 的小數點向左移四位，答案為 29.1357」。對這些學生而言，數學是一些分割、不連貫的事實和公式，必須加以記憶和練習。當學生在解決數字問題時，他們必須背誦一連串的公式以應付考試。究其原因乃是由於學生為考試而學習，只知如何運用學校中所學得之標準計算法則，而非真正的對數字瞭解，即缺乏數字常識。這些研究更強化了幫助我國兒童發展數字常識的能力是刻不容緩的。

五、數字常識教學之相關研究

基於此，既然發展數字常識是如此的重要，哪我們又該如何幫助兒童發展數字常識呢？Kamii（1994）以建構主義為基礎證實低年級的學童能夠發展他們自己的策略以解決多位數整數問題。Warrington 和 Kamii（1998）發現「當兒童不被教授傳統的算則時，他們的數字常識和位值的知識是遠優於那些接受傳統算則教學的兒童」(p. 339)。她們同時認為強調算則的教學，無法幫助兒童建構分數之四則運算的概念，而是應該提供兒童開放式的學習情境，以建構分數與運算之理解。Owens 和 Super（1993）主張小數與分數的教學應重視觀念性知識的獲得，與減少程序性知識的教學。一些研究計畫（Cobb *et al.*, 1991; Treffers, 1991; Wright, 1994）也證實了學生在設計良好的教學活動下比那些接受傳統教學的學生更可能發展數字常識。一些相關之數字常識教學研究（Markovits & Sowder, 1994; Yang & Reys, 2001a, 2001b）所進行之教學實驗亦證明可幫助學生發展數字常識；同時也證實了：在教學後，學生更能彈性地運用數字常識的特徵，而且具有長時期的保留成效。基於此，研究者的研究動機乃在於：是否可設計一些教學活動配合小六（第十一冊）數學課程強調數字常識，經由有意義的以及富彈性的方式融入正常的教學活動中以幫助學生發展數字常識的能力？欲探討之研究問題如下：

1. 教學前、後小六學生數字常識紙筆測驗之改變情形為何？
2. 教學前、後接受訪談學生其數字常識能力之改變情形為何？

叁、研究方法

本研究的目的主要在探討研究者所設計之一系列數字常識教學活動，融入小六之數學課室中，是否可以提昇國小六年級數字常識之能力。由於要評估兒童的數字常識能力是否改變，因此本研究之研究法包括量與質的分析。首先從量的觀點，以統計法分析全班學生在教學前、後、與保留測驗之紙筆測驗表現，以分析學生之改變；進而經由質的研究，以深入探討受訪學生在教學前、後、與保留訪談之數字常識能力的改變。以下將分別探討研究過程。

一、數字常識理論組織架構

研究者參考數字常識相關之文獻與研究報告而發展了一個數字常識之組織架構（楊德清, 2000b, 2000c; Markovits & Sowder, 1994; McIntosh *et al.*, 1999; NCTM, 1989, 2000; Reys *et al.*, 1991; Sowder, 1992a, 1992b; Sowder & Schappelle, 1989)。這個組織架構定義數字常識的主要組成成份包含 5 個部分：

◎瞭解數字的基本意義；

◎比較數字大小的能力；
◎瞭解運算對數字的意義和影響；
◎運用參考點；
◎發展估算策略，以及能夠判斷運算結果之合理性。

由這 5 個元素所組成之數字常識組織架構乃是構成本研究設計數字常識教學活動以幫助小六學童發展數字常識能力之實驗教學的基石。雖然數字常識的理論架構尚有爭論，但基本上已有一共同的共識。本研究所定義之數字常識組成成份，相當符合數字常識領域專家學者（Markovits & Sowder, 1994; McIntosh, Reys, & Reys, 1992; Sowder, 1992a, 1992b）之觀點，亦與 NCTM 之課程標準（1989, 2000）對數字常識之主張相一致。同時研究者亦請數字常識專家 Reys 教授對本研究之理論基礎與數字常識教學活動提供建議，並受其肯定與認同。

二、參與研究之樣本

參與本研究之學校分別選自南部二所公立之小學（A 校與 B 校）；A 小學為鄉村型，居民多以務農及勞工為主，並自六年級學生中選取一個班級 29 位小六學生（16 位男生和 13 女生）參加本研究。B 校屬大型小學，學童的家長社經地位差異頗大，包含工、商、農、公各階層，生活背景與環境迥然不同，文化認知亦有差異。B 校亦選取一班六年級學生共 41 人（男生 20 名，女生 21 名）參加本研究。

研究者依據數字常識前測成績將學生分為三個等級：上（前 10%，編碼為 HA1,HA2；HB1,HB2）、中（40%-60%,編碼為 MA1,MA2；MB1,MB2）、下（後 10%,編碼為 LA1，LA2；LB1,LB2），並自二班各個階層隨機選取二位學生共 12 位參與本研究之教學前、後、及保留訪談，以探究其數字常識成長情形。

三、教學活動

研究者根據上述之數字常識理論組織架構，相關之數字常識教學活動（McIntosh *et al.*, 1997; Markovits & Sowder, 1994; Reys *et al.*, 1991）以及配合我國國小數學課程標準所設計之五個數字常識教學活動單元。第一個單元包括了小數與分數概念的培養；第二個單元包括數字大小之認知與理解；第三個單元為參考點能力的養成；第四個單元為運算對數字的意義和影響之能力的形成，與第五個單元為估算能力之培養。

四、教學法與教學流程

本研究之教學法乃運用強調學習過程之過程導向教學(Fraivillig, 2001; Jarvis & Blank, 1989; Reys *et al.*, 1991)。所謂過程導向教學意即教師創造課室學習情境與提供具數學價值之教學活動，以鼓勵學生參與討論、探索、以及促進思考，以提昇兒童之數字常識能力。此教學活動所主張之過程：鼓勵兒童以自己的方式思考以解題，勇於與他人溝通、分享他們的思考模式與解題方法，同時提倡與鼓勵兒童使用不同與多種之解題策略（Reys *et al.*, 1991）。

數字常識教學活動實施時間，為每週星期五上午的第三、四節課。教學時，首先依各單元之設計佈題，以投影片之方式，將題目投射在布幕上，研究者將題目複誦一次，並詢問兒童是否瞭解題意。接著請小朋友分組討論。在分享成果階段，各組同學均可對問題提出質疑，由小組報告人回答，研究者並適時引導，提出進一步的問題，用以釐清兒童的解題方式及相關的意圖，當問題得到充分的理解後，鼓勵小朋友提出自己發明的方法，或教師就類似的問題再佈題檢驗兒童的學習成果。詳細之過程導向數字常識教學活動進行方式請參考相關之文章(Yang, 2002; Yang & Reys, 2001a, 2001b)。教學流程如圖 3-1。

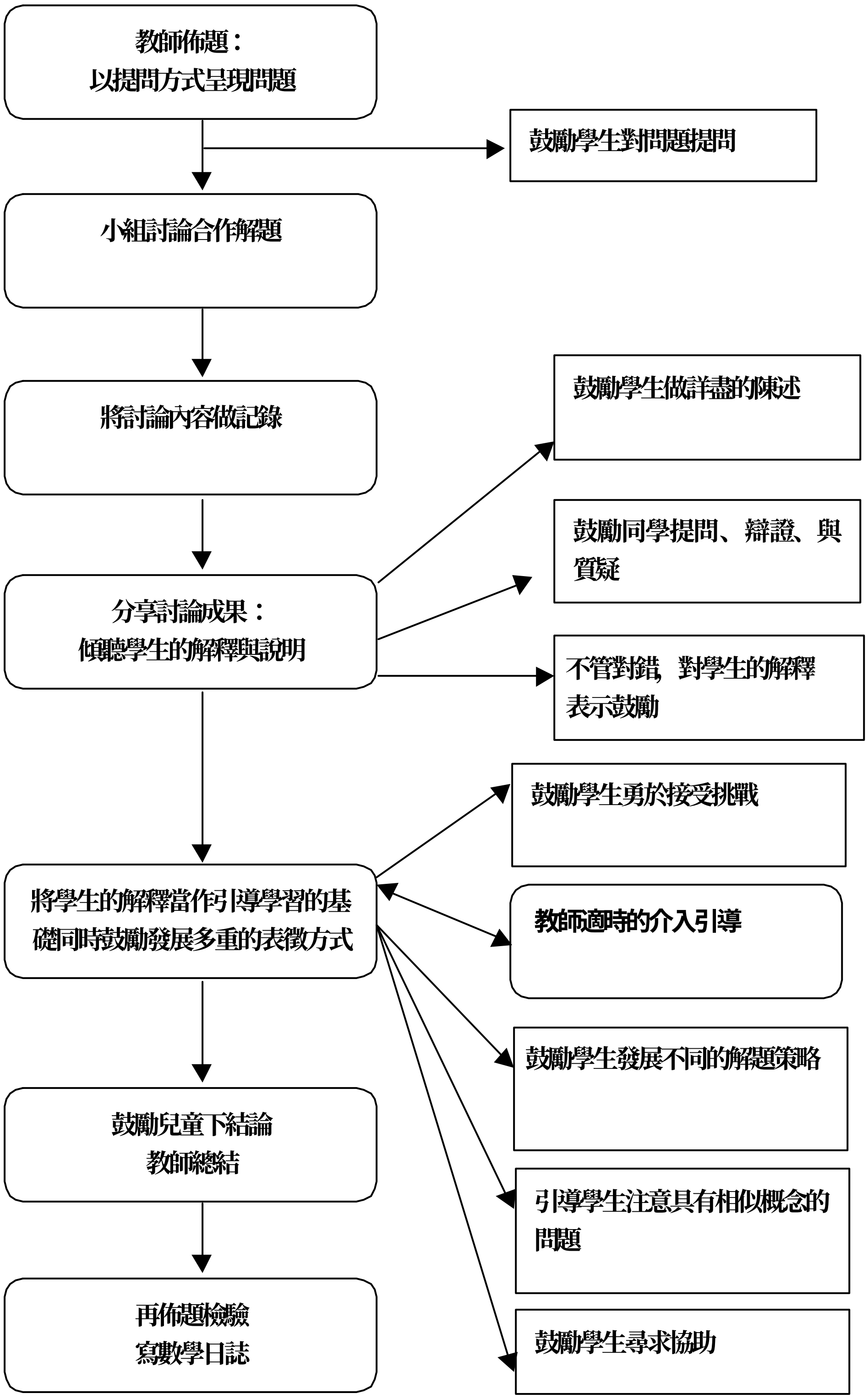

圖 3-1：過程導向之教學活動流程範例

數字常識課程融入過程導向教學之進行方式

問題：下列哪一個分數比較大 $\frac{16}{17}$ & $\frac{18}{19}$ ？為什麼？請解釋你的理由與原因。分組討論，請同學分享心得。

教師佈題：以提問方式呈現問題

【教師於上課前發工作單】

S：（S11）老師，一定要分出分數的大小嗎？

T：對啊，題目就是請你分出大小啊！

S：不能寫等於嗎？

T：也可以啊，如果你覺得兩個是等於，你就寫等於啊，哦，不一定是哪一個分數比較大，也許你覺得這兩個數是相等的，就提出是相等的理由，來，請討論。

鼓勵學生對問題提問

S：（第一組）老師我們已經好了【約莫過了二分鐘而已，顯然沒有經過充分的討論】

T：你們趕快互相討論一下，不然等一下，你可能通不過同學對你的質疑哦。

小組合作解題，鼓勵組內討論	請學生將討論內容作記錄

（分組討論）

T：好，那一組先來說說看，來，第五組來，現在注意聽哦，你講話就準備扣分囉，你可以對他的答案提出質疑，但現在不可以講話。第五組要說說看囉，來。

分享討論成果：鼓勵發表、傾聽學生的解釋與說明

S：（第五組）我有兩塊蛋糕，體型都是一樣的啊。

T：有兩塊蛋糕，體型都是一樣的。

S：一個分成 17 份，一個分成 19 份

T：沒關係，慢慢說！

S：17 份分給 16 個人嘛，

S：啊，他們的大小差不多是這樣（以小白板展示），啊 19 份分給 18 個人，它們的大小差不多是這樣（以小白板展示），所以，我們的嗯嗯 ….. 我的答案是 $\frac{16}{17}$。

鼓勵學生做詳盡的陳述

………

T：第三組來發表一下。好，第五組請先回去，好，來，第三組要發表了，好，來，先說你的答案是哪一個？

S：（第三組）$\frac{16}{17}$。

T：$\frac{16}{17}$ 比較大哦，好，來，什麼理由？

S：因為如果同樣一塊地，如果是 $\frac{1}{17}$ 跟 $\frac{1}{19}$ 的話，$\frac{1}{19}$ 這樣每一塊會比較小。

T：然後呢？

S：因為 $\frac{18}{19}$ 會留下一塊，啊 $\frac{16}{17}$ 也留下一塊，所以 $\frac{16}{17}$ 會比較大。

T：好，來，（S11 舉手發問）

S：（S11）你們留下的哪一塊有沒有一樣大啊！

S：（第三組）不一樣大，我前面說過了。

S：（S11）那哪一塊比較大？

鼓勵同學提問、辯證、與質疑

T：哪一塊比較大？

S：（第三組）$\frac{1}{17}$比較大？

T：有沒有回答你的問題，好，謝謝你，好，換哪一組，好，第四組，非常好哦，哇，第四組最近表現越來越好。

S：（第四組）是等於啊！

T：等於，這兩個分數是相等的哦，來，注意聽哦，你等一下有問題再問他。

S：因為哦那個$\frac{16}{17}$哦 16 很接近 17。

T：$\frac{16}{17}$的 16 很接近 17，然後呢？

S：$\frac{18}{19}$的 18 也很接近 19。

T：$\frac{18}{19}$的 18，那個分子 18 也很接近 19。

S：所以啊比如啊各加 1 啊(指分子各加上 1)，那就兩個都等於 1 啊，兩個都等於 1，那就是一樣啊！

不管對錯，對學生的解釋表示鼓勵

………

S：（第一組）我們這一組的答案是$\frac{18}{19}$比較大。

T：好，為什麼呢？

S：因為那個用畫圖表示(以長條圖呈現$\frac{16}{17}$及$\frac{18}{19}$)，那個它們都會剩下一份。

T：它們都會剩下一份？對。

S：沒有滿，然後$\frac{1}{19}$跟$\frac{1}{17}$比，$\frac{1}{19}$比較小。

T：對，然後呢？

S：所以$\frac{18}{19}$就會比較大。

T：解釋的很清楚喔! 各位懂不懂!

…

T：還有沒有同學有不同的想法要提出來？

S：$\frac{18}{19}$比較大。因為 $\frac{16}{17}+\frac{1}{17}=1$，$\frac{18}{19}+\frac{1}{19}$也等於 1。那$\frac{1}{17}$比$\frac{1}{19}$大，所以剩下的部份就會比較小。………

將學生的解釋當作引導學習的基礎同時鼓勵發展多重的表徵方式

………

T：哇![鐘聲響了!]有沒有同學可以幫忙作簡單的結論？茲茲…….。

鼓勵兒童下結論、教師總結

教師發工作單[下列哪一個分數比較大 $\frac{16}{17}$ & $\frac{18}{19}$？為什麼？解釋你的理由與原因。分組討論，請同學分享心得]，並請同學寫數學日誌。

再佈題檢驗與寫數學日誌

上述之教學活動實錄，為 A 校班級之教學進行過程。

五、評量工具

評量工具分為紙筆測驗與晤談二類。紙筆測驗與晤談工具由研究者參考上述之數字常識組織架構所設計。

紙筆測驗：包括前測﹑後測﹑與保留測驗。每一個測驗重點在探究學生對小數與分數概念之瞭解﹑比較數字大小之能力﹑能使用參考點，瞭解運算對數字之相對的影響，及發展估算能力。每個測驗之題目分別為 30 題，（數字常識之五個元素各有 6 個問題），每次測驗之時間約為 30 分鐘。後測題目題型同前測，然大部分題目經修正為數字較複雜，例如前測題目為：

比較$\frac{5}{6}$和$\frac{8}{9}$那一個較大？(1) $\frac{5}{6}$ (2) $\frac{8}{9}$ (3)一樣大 (4)無法比較。

表 3-1：教學與評量實施計畫表

日期	筆試測驗	訪談	教學活動
九月	教學前之前測	教學前之訪談	第一個教學單元活動
十月			第二個教學單元活動
十一月			第三個教學單元活動
十二月			第四、五個教學單元活動
一月　二月	教學後之後測	教學後之訪談	第五個教學單元活動
五月　六月	保留概念測驗	保留概念訪談	

後測題目修改為：

比較 $\frac{8}{9}$ 和 $\frac{10}{11}$ 那一個較大？(1) $\frac{8}{9}$ (2) $\frac{10}{11}$ (3)一樣大 (4)無法比較。

少部分保留；保留測驗之題目與後測題目相同。

經由 SPSS8.0 統計分析結果知道，前測重測信度（Test-Retest reliability）之相關係數為 .802，已達到 .01 的顯著水準；後測重測信度之相關係數為 .825，亦已達到 .01 的顯著水準，顯示前、後測的重測信度相當高，穩定性亦佳。故本測驗具良好之重測信度。同時，經由 T-Test 結果可知前、後測題目在難度上相當；亦即前、後測題目不會因為某測驗過於困難或容易，以致檢測結果失真。

研究者聘請具 10 年左右數學科教學經驗的六年級教師三位，就前、後測題目的內容逐題審閱，以瞭解內容是否有超出六年級課程部份。經這三位小六數學科老師審閱結果，認為試題內容符合六年級範圍。同時亦請相關的專家學者檢視本測驗之代表性與周延性，亦獲一致之認同。故本測驗具內容效度與專家效度。

訪談工具：包括教學前、教學後、與保留概念訪談。教學前與後（保留訪談之題目與教學後訪談相同）之訪談題目分別選自前測與後測題目，並分別自數字常識組成成份各子項目（比較數字大小、瞭解運算對數字的意義和影響、運用參考點、與發展估算策略，以及能夠判斷運算結果之合理性）選取 3 個問題，故每一訪談共包括 12 個問題，主要目的乃希望經由訪談中深入的瞭解學生對問題之理解程度以進一步的探究受測學生之數字常識能力之成長情形。此部分之研究法主要是採用訪談策略以進行研究，每次訪談時間約需 50 至 60 分鐘。所有訪談皆有錄音，以便日後之轉譯及分析之用。本研究之教學與評量實施計畫如表 3-1。

六、分析

紙筆測驗：前後測，與保留測驗各包括 30 題選擇題，若答案對則給 1 分，錯則 0 分，沒有部分分數。故前後測，與保留測驗之滿分各為 30 分。

訪談：學生之回答被仔細地分析、檢驗，然後依對錯分類。每一個正確之答案依其解釋之方式分為下列三種類別：

*數字常識方法：回答之方法反映數字常識之元素，如比較數字大小、運用參考點、發展估算策略、與運算對數字之相對的影響，則歸類於此。

*傳統算則方法：回答之方式採用傳統計算之原理，例如使用通分、小數化為分數或分數化為小數、或者記憶之方式，則歸類於此。

*無法解釋：給予正確的答案，但無法解釋或解釋為錯誤的則被歸類於此。

肆、研究結果與討論

表 4-1 報告樣本學生之紙筆測驗前測、後測、與保留測驗之全班總平均數與標準差。表 4-2、表 4-3 與表 4-4、表 4-5 分別呈現 A 校與 B 校之前測、後測，以及前測、保留測驗之 T-考驗結果，結果顯示後測以及保留測驗之成績顯著地較前測成績進步（$p < 0.01$）。此表示學生在教學後之數字常識能力有顯著的成長。

表 4-6 與表 4-7 分別呈現後測與保留測驗之 T-考驗結果，兩者不具顯著差異性。雖然經過四個月之後進行保留測驗，然而保留成效相當不錯，學生之成績並沒有顯著降低。此結果正顯示學生在接受數字常識教學後之保留成效相當良好，代表學生理解的成份高於記憶背誦的學習。

表 4-8 與表 4-9 分別呈現的是 A、B 兩校受訪學生在教學前、教學後、與保留訪談在回答數字常識問題之表現情形；

表 4-10 總結學生回答各數字常識問題在各組成成份之整體表現情形。

從表 4-8 至表 4-10 的觀察與分析中，獲得下列七項特點：

＊資料顯示教學前訪談學生傾向於給予錯誤答案；即使學生給予正確的答案，傳統算則的方式或者是無法解釋理由，是各階層學生最常使用之方法。

＊教學前，學生回答訪談問題時，少有數字常識策略的呈現。例如：12 題訪談問題中 HA1 只有 2 題，HA2, MA2,和 LB2 只有 1 題是使用數字常識策略解釋其原因。而 MA1, LA1, LA2, MB1 和 LB1 完全沒有呈現數字常識的能力。

＊教學後，可以發現多數的學生回答訪談問題時，其理由明顯地反映使用數字常識的方式。只有 B 校之 LB1 與 LB2 並無任何的成長。究其原因乃該二位學生在班上之學習能力原本就較差，以至教學對這兩位學生並無顯著之影響。

＊MA1 數字常識能力並未有顯著成長（4 題使用數字常識策略），結果顯示傳統算則方式仍是她的最愛。事實上她的數學成績在該班是前三名，相當好。由於她的計算能力強，所以她非常喜歡作計算工作。由於計算速度快、正確率高，因此她認為傳統計算法則是最快、最有效率的解題方式。由於傳統算則深深地影響她對問題的看法，因此欲在短時間內改變她的學習方式與觀念是不容易的。

＊結果顯示學生在教學後，正確回答率相對地提高，而且使用傳統算則之方式亦明顯地減少。顯示學生能夠以理解數字意義的方式發展策略以解決問題。

＊表 4-10 顯示學生在各數字常識元素之回答反映了使用數字常識之顯著成長情形。

＊保留測驗之結果顯示學生數字常識的保留成效相當良好，此正顯示學生學習過程中理解的成份高於記憶的學習。

為了更深入的瞭解學生在教學前、後解題能力之改變，以下將經由對照方式詳細的呈現三位學生（HA2, MA2 和 LA2）回答訪談問題的思考模式與解題架構，以分析其數字常識能力的成長情形。

一、HA2 在教學前、後之數字常識策略運用之改變

HA2 在回答教學前訪談問題時只有 1（佔 1/12）題的解釋理由建立在數字常識的基礎上，5 題採用傳統算則的方式，3 題給予正確的答案但無法解釋其理由，3 題的答案是錯誤的。然而在教學後，HA2 有 11 題運用數字常識的策略回答問題，只有 1 題是沿用算則方式。顯見其數字常識能力的精進。以下是選自 HA2 在教學前後精采之訪談實錄，以明顯對比其教學前、後之差異性：

表 4-1：樣本 A 校與 B 校教學前、後、與保留測驗之數字常識表現

班級	前 測		後 測		保 留 測 驗	
	平均數	標準差	平均數	標準差	平均數	標準差
A 校（29 人）	9.6	3.30	15.7	5.33	15.1	4.53
B 校（41 人）	14.1	4.61	17.3	5.19	16.9	4.97

總分為 30 分

表 4-2：A 校學生前測與後測之 T-考驗結果

	成對變數差異					t	自由度	顯著性(雙尾)
	平均數	標準差	平均數的標準誤	差異的 95% 信賴區間				
				下界	上界			
成對 1　前測－後測	-6.1034	4.9594	.9209	-7.9899	-4.2170	-6.627	28	.000

表 4-3：A 校學生前測與保留測驗之 T-考驗結果

	成對變數差異					t	自由度	顯著性(雙尾)
	平均數	標準差	平均數的標準誤	差異的 95% 信賴區間				
				下界	上界			
成對 1　前測－保留	-5.5517	3.9332	.7304	-7.0479	-4.0556	-7.601	28	.000

表 4-4：B 校學生前測與後測之 T-考驗結果

	成對變數差異					t	自由度	顯著性(雙尾)
	平均數	標準差	平均數的標準誤	差異的 95% 信賴區間				
				下界	上界			
成對 1　前測－後測	-3.1951	4.3372	.6774	-4.5641	-1.8261	-4.717	40	.000

表 4-5：B 校學生前測與保留測驗之 T-考驗結果

成對樣本檢定

	成對變數差異					t	自由度	顯著性(雙尾)
	平均數	標準差	平均數的標準誤	差異的 95% 信賴區間				
				下界	上界			
成對 1　前測－保留	-2.7805	4.4582	.6963	-4.1877	-1.3733	-3.993	40	.000

表 4-6：A 校學生後測與保留測驗之 T-考驗結果

成對樣本檢定

	成對變數差異					t	自由度	顯著性(雙尾)
	平均數	標準差	平均數的標準誤	差異的 95% 信賴區間				
				下界	上界			
成對 1　後測－保留	-.5517	3.7377	.6941	-.8700	-1.9735	-.795	28	.433

表 4-7：B 校學生後測與保留測驗之 T-考驗結果

成對樣本檢定

	成對變數差異					t	自由度	顯著性(雙尾)
	平均數	標準差	平均數的標準誤	差異的 95% 信賴區間				
				下界	上界			
成對 1　後測－保留	-.4146	3.3013	.5156	-.6274	-1.4567	-.804	40	.426

表 4-8：A 校受訪學生在教學前、教學後、與保留訪談在回答數字常識問題之表現

	HA1	HA2	MA1	MA2	LA1	LA2
教學前訪談						
正確答案						
數字常識方法	2 (17%)	1 (8%)	0 (0%)	1 (8%)	0 (0%)	0 (0%)
傳統算則方法	3 (25%)	5 (42%)	2 (17%)	3 (25%)	2 (17%)	2 (17%)
無法解釋	1 (8%)	3 (25%)	2 (17%)	4 (33%)	0 (0%)	2 (17%)
不正確的答案	6 (50%)	3 (25%)	8 (66%)	4 (34%)	10 (83%)	8 (66%)
教學後訪談						
正確						
數字常識方法	11 (92%)	11 (92%)	4 (33%)	9 (75%)	8 (66%)	10 (83%)
傳統算則方法	1 (8%)	0 (0%)	5 (42%)	1 (8%)	1 (8%)	2 (17%)
無法解釋	0 (0%)	1 (8%)	0 (0%)	2 (17%)	1 (9%)	0 (0%)
不正確的答案	0 (0%)	0 (0%)	3 (25%)	0 (0%)	2 (17%)	0 (0%)
保留訪談						
正確						
數字常識方法	8 (66%)	11 (92%)	4 (33%)	9 (75%)	7 (58%)	8 (66%)
傳統算則方法	1 (9%)	0 (0%)	3 (25%)	0 (0%)	1 (8%)	2 (17%)
無法解釋	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	2 (17%)	1 (9%)	1 (8%)
不正確的答案	3 (25%)	1 (8%)	5 (42%)	1 (8%)	3 (25%)	1 (9%)

1.教學前訪談與教學後訪談之問題各 12 題。

2.表內各子項 之數字代表該生回答 12 題訪談問題之使用次數。

3.(　)內之百分比代表其所占之比率。

表 4-9：B 校受訪學生在教學前、教學後、與保留訪談在回答數字常識問題之表現

	HB1	HB2	MB1	MB2	LB1	LB2
教學前訪談						
正確答案						
數字常識方法	4 (33%)	6 (33%)	0 (0%)	4 (34%)	0 (0%)	1 (8%)
傳統算則方法	6 (50%)	3 (33%)	0 (0%)	4 (33%)	3 (25%)	3 (25%)
無法解釋	0 (0%)	1 (0%)	5 (41%)	0 (0%)	2 (17%)	1 (8%)
不正確的答案	2 (17%)	2 (34%)	7 (59%)	4 (33%)	7 (58%)	7 (59%)
教學後訪談						
正確						
數字常識方法	9 (75%)	12 (100%)	6 (50%)	9 (75%)	1 (8%)	2 (17%)
傳統算則方法	3 (25%)	0 (0%)	1 (8%)	1 (8%)	0 (0%)	1 (8%)
無法解釋	0 (0%)	0 (0%)	3 (25%)	0 (0%)	5 (42%)	1 (8%)
不正確的答案	0 (0%)	0 (0%)	2 (17%)	2 (17%)	6 (50%)	8 (67%)
保留訪談						
正確						
數字常識方法	8 (67%)	12 (100%)	4 (34%)	10 (84%)	1 (8%)	2 (17%)
傳統算則方法	1 (8%)	0 (0%)	2 (16%)	1 (8%)	1 (8%)	1 (8%)
無法解釋	0 (0%)	0 (0%)	4 (34%)	0 (0%)	5 (42%)	1 (8%)
不正確的答案	3 (25%)	0 (0%)	2 (16%)	1 (8%)	5 (42%)	8 (67%)

表 4-10：受訪學生在教學前、後、與保留訪談各數字常識組成成份之分析

訪談問題	教學前訪談		教學後訪談		保留訪談	
比較數字大小（1-3 題）						
正確	A 校	B 校	A 校	B 校	A 校	B 校
數字常識方法	1	5	17	13	12	12
傳統算則方法	5	6	0	1	1	1
無法解釋	2	0	0	3	1	2
不正確的答案	10	6	1	1	4	3
運用參考點（4-6 題）						
正確						
數字常識方法	0	3	14	8	11	8
傳統算則方法	3	5	1	1	1	1
無法解釋	6	3	1	3	2	4
不正確的答案	9	8	2	6	4	5
估計（7—9 週）						
正確						
數字常識方法	0	2	10	8	11	7
傳統算則方法	4	5	4	3	2	1
無法解釋	2	4	2	1	1	2
不正確的答案	12	7	2	6	4	8
運算對數字之相對影響（10-12 題）						
正確						
數字常識方法	3	5	12	10	13	10
傳統算則方法	5	3	5	1	3	3
無法解釋	2	2	1	2	0	2
不正確的答案	8	8	0	5	2	3

1.表內各子項之數字代表該生回答數字常識各組成成份所使用之次數。

(一)比較數字大小能力的改變

教學前依賴通分的方式解題：

** (HA2 之教學前訪談 890905)**

R (Researcher)：$\frac{5}{6}$ 或 $\frac{8}{9}$ 哪一個較大？

HA2：$\frac{5}{6}$。

R：那又為什麼呢？

HA2：應該是 $\frac{8}{9}$。

R：$\frac{8}{9}$？為什麼呢？

HA2：嗯..因為那是..嗯？!應該是一樣大吧？

R：一樣大噢？

HA2：是。

R：為什麼呢？

HA2：因為如果畫出兩個蛋糕，一個分成九份吃掉八份，另一個畫成六份吃掉五份，應該是一樣大。

R：應該是一樣大噢？

HA2：對！要不然就是$\frac{5}{6}$大。我沒有主見。

R：你能不能確定？

HA2：$\frac{5}{6}$。

R：你要解釋一下你的理由啊！

HA2：不知道。

很明顯地HA2 對比較異分母與分子之分數大小的比較方式，具明顯的迷思概念。雖然他瞭解$\frac{5}{6}$可以以畫蛋糕呈現，知道$\frac{5}{6}$將"*一個蛋糕畫成六份吃掉五份*"，以及瞭解$\frac{8}{9}$能夠以"*畫出一個蛋糕，一個分成九份吃掉八份*"來表徵，但是卻無法真正的瞭解$\frac{5}{6}$與$\frac{8}{9}$的內涵，以致於無法以有意義的方式去比較此類分數的大小。

教學後能夠彈性地比較數字大小而且能夠運用適當的參考點以回答問題：

** (HA2 教學後訪談 90/01/15)**

R：如果小明喝了一瓶牛奶的 $\frac{13}{14}$，而小英喝了另一瓶相同大小之牛奶的 $\frac{9}{10}$，請問是誰喝得比較多呢？請解釋你的理由。

HA2：小明喝的比較多。

R：為什麼是小明？請告訴我你的理由？

HA2：畫兩個圓嘛！這個 $\frac{13}{14}$差的比較小，這個 $\frac{9}{10}$差的比較大。所以 $\frac{13}{14}$比較大。

R：為什麼$\frac{13}{14}$差的比較小？

HA2：就是 $1-\frac{13}{14}$就等於 $\frac{1}{14}$啊！因為它分的比較細，就比較小啊！

R：然後呢？

HA2：$1-\frac{9}{10}$就等於 $\frac{1}{10}$，就比 $\frac{1}{14}$還要大啊！因為它分的比較大，就比較大啊！

在教學後，HA2 能夠以有意義的方式比較分數之大小。解題中他已展現了對分數意義的理解，也使用了數字常識的策略--能夠以 1 為參考點，瞭解$\frac{13}{14}$和$\frac{1}{14}$，以及$\frac{9}{10}$和$\frac{1}{10}$之互補性與關係，而不再模糊不清。

(二)發展適當的參考點策略以解題之能力的改變

教學前必需依賴紙筆計算的方式以求得答案

** (HA2 教學前之訪談 89/09/05)**

R：下列哪一個分數的和大於 1？

(1) $\frac{2}{5}+\frac{3}{7}$ (2) $\frac{1}{2}+\frac{4}{9}$ (3) $\frac{3}{8}+\frac{2}{11}$ (4) $\frac{4}{7}+\frac{1}{2}$？

HA2：[猶豫了一會兒！]嗯．．這個我還用猜的耶。

R：可不可以告訴我你的想法？

HA2：我可不可以使用鉛筆來算？

R：如果不使用鉛筆來算可以求出答案嗎？

HA2：很難算！

R：那你就用筆算算看！

HA2：H2 再 A4 紙上寫下如下之計算過程：

$$\frac{2}{5}+\frac{3}{7}=\frac{14}{35}+\frac{15}{35}=\frac{14+15}{35}=\frac{29}{35},$$

$$\frac{1}{2}+\frac{4}{9}=\frac{9}{18}+\frac{8}{18}=\frac{9+8}{18}=\frac{17}{18},$$

$$\frac{3}{8}+\frac{2}{11}=\frac{33}{88}+\frac{16}{88}=\frac{33+16}{88}=\frac{49}{88},$$

$$\frac{4}{7}+\frac{1}{2}=\frac{8}{14}+\frac{7}{14}=\frac{8+7}{14}=\frac{15}{14}$$

所以答案是 $\frac{4}{7}+\frac{1}{2}$ *大於 1。*

R：有不同的方法嗎？

HA2：沒有！

教學前，HA2 必須依賴傳統算則的計算方式，依照數學課中所傳授之通分方法，一步一腳印地執行每一個子項目的計算工作，而無法從不同的思考角度與有意義的方式發展解題策略。

教學後能夠發展適當的參考點以解決問題：

** (HA2 教學後訪談 90/01/15)**

R：下列哪一個分數的和大於 1？

(1) $\frac{5}{9}+\frac{1}{2}$ (2) $\frac{3}{8}+\frac{2}{5}$ (3) $\frac{5}{12}+\frac{3}{8}$ (4) $\frac{3}{7}+\frac{1}{2}$？

HA2：第二組之這兩個分數(指 $\frac{3}{8}$ *和* $\frac{2}{5}$*)都比* $\frac{1}{2}$ *小，所以他們的和就不會比 1 大。*

R：然後呢？

HA2：第三組也是。

R：可不可以說清楚一點？

HA2：第三組之 $\frac{5}{12}$ *和* $\frac{3}{8}$ *也都比* $\frac{1}{2}$ *小，所以* $\frac{5}{12}+\frac{3}{8}$ *不會比 1 大。然後第四組之這個(指* $\frac{3}{7}$*)沒有到* $\frac{1}{2}$*，這個剛好到* $\frac{1}{2}$*。所以它們的和也不會比 1 大。*

R：然後呢？

HA2：然後 $\frac{5}{9}$ *超過* $\frac{1}{2}$*，所以加上* $\frac{1}{2}$*，一定會超過 1。*

教學後，HA2 能夠參照題目的需求而發展與運用適當的參考點，而不必須依賴紙筆計算的方式才能判斷正確的答案。例如 HA2 在解本題時，即能應用 $\frac{1}{2}$ 為參考點，迅速地決定哪一個分數小於或大於 $\frac{1}{2}$，並據以決定其和是否超過 1。同時亦可發現 HA2 在回答問題時充滿了信心以決定答案，而不像教學前之猶豫不定。

(三)估算能力之成長

教學前習慣依賴算則的方法以決定乘積小數點的位置

** (HA2 教學前之訪談 89/09/05)**

R：小明用計算器求得 534.6 × 0.545 = 291357，但漏掉了小數點的位置，請用估計的方法幫他找出正確的答案：

(1)2.91357 (2)29.1357 (3)291.357 (4)2913.57 (5)沒有計算無法找出答案

HA2：答案是 29.1357。

R：可不可以請你告訴我為什麼答案是 29.1357？

HA2：因為這個數字（指 534.6）有 1 位小數，而這個數字（指 0.545）有 3 位。然後 1 ＋3 等於 4，所以乘積的結果就有 4 位小數，因此答案是 29.1357。

R：你為什麼會這麼判斷呢？

HA2：因為以前老師有教過啊！因為是乘法嘛，乘一乘若是後面有 3 位，這裡有 1 位，加起來就是 4 位。

R：你有不同的解法嗎？

HA2：[想了一會兒！]嗯！... 不知道！

傳統算則的方式是 HA2 習慣且唯一之解決問題的方法，事實上並不只有 HA2，對多數接受傳統教學的學生而言，皆具有如此之迷思概念。在傳統的數學課室裡，對於小數乘法之問題，教師與數學教科書往往習慣性地告訴小朋友：小數乘小數之小數點的位置乃是由被

乘數小數點的位數加上乘數小數點的位數所決定。因此當小朋友被要求去決定小數位數時，他們往往使用背誦公式的方法解決問題，而無法深入的思考，以這樣的方法所求出之答案到底有沒有意義或者合不合理？在如此模式的學習情境下，思考的方向被侷限於算則的藩籬內，而無法將邏輯思考與推理的向度延伸，實已失去了數學學習的真意與精神。

教學後能夠發展估算的策略解題與判斷答案的合理性

** (HA2 教學後訪談 90/01/15)**

R：小明用計算器求得 49.05×6.044=2964582，但漏掉了小數點的位置，請用估計的方法幫他找出正確的答案：

(1)2.964582　(2)29.64582　(3)296.4582

(4)2964.582　(5)沒有計算無法找出

HA2：(3)

R：為什麼是 (3)？請說說看你的理由。

HA2：因為 49.05 大約是 50，6.044 大約是 6，然後兩個相乘(指 50×6)等於 300。所以 296.4582 是較接近的答案。

很明顯地，經過教學後 HA2 能夠運用估算的策略與選擇適當的參考點以決定答案的合理性。例如在本題中，HA2 即選擇 50 當作 49.05 之參考點，6 當作 6.044 之參考點，以估計其值大約為 300 是合理的。並且知道其他答案(如 29.6458，2964.58 等)為不合理的估計值。

綜合上述深入的分析結果，可以發現 HA2 在經歷教學前與教學後之改變，從教學前之無法運用理解與數字常識的組成成份，至教學後能夠發展與運用數字常識的元素 –瞭解數字的基本意義、認知數字大小、發展參考點、以及發展估算能力，皆顯示教學對他學習的影響與成長。

二、MA2 在教學前、後數字常識能力之改變

MA2 在教學前訪談幾乎沒有呈現使用數字常識策略的能力而且她的回答中有超過 60% 的答案是錯誤的或無法解釋理由，顯見其數概念能力相當的弱。同時在教學前，MA2 的反應顯現的是表達能力差，談的不多，回答問題時缺乏信心，而且無法清楚的解釋理由。然而在教學活動之後，MA2 正確地回答 12 題訪談問題，其中有 9 題清楚地反映了使用數字常識策略。雖然 MA2 在估算能力方面並沒有顯著的成長（2 題估算問題雖給予正確答案，1 題無法給予正確的解釋，另一題估算問題則是使用算則的方式)。但整體而言，MA2 之數字常識能力遠比教學前進步很多，同時由教學後訪談中可發現，他在回答問題時較充滿自信心，且解釋原因時亦反映了發展數字常識的策略。以下是 MA2 在教學前、後之部分訪談摘要：

(一)判別分數大小能力之改變

教學前對異分母與異分子之分數大小的比較具迷思概念

** (MA2 教學前之訪談 89/09/07)**

R：請問你 $\frac{5}{6}$ 和 $\frac{8}{9}$ 那一個比較大呢？

MA2：[沉思片刻！] $\frac{5}{6}$ 吧！

R: 請解釋你的理由。

MA2：如果我畫圈圈，那麼 $\frac{5}{6}$ 會比較大。

R：可不可以請你再解釋清楚一點。

MA2：我畫圈圈，分 6 塊，每塊比較大；啊分 9 塊，每塊比較小。所以 $\frac{5}{6}$ 比較大。

MA2 很顯然的具有比較異分子與分母之分數大小概念的迷思。MA2 在比較此類分數大小時只考慮分母之大小，而忽略了分子的大小亦不同；無法對分母與分子的關係作觀念性的連結。此種迷思概念應証了先前的一些相關研究（楊德清, 2000b; Behr, Wachsmuth, Post, & Lesh,1984; Kerslake,1986）的研究結果：學生處理分數時常常傾向於將分子與分母視為分離

的個體，而忽略了他們的相關性。例如：學生在比較異分母與異分子之分數時往往將同分母但異分子的分數之比較方法類推，或者只考慮分子的大小，而無法同時考慮分子與分母的關係。

教學後能夠發展比較分數大小以及以 1 為參考點之能力以回答問題：

(MA2 教學後訪談 90/01/20)

MA2：小明

R：請告訴我為什麼？

MA2：因為他剩下的比較小。

R：怎麼說呢？

MA2：小明喝 $\frac{13}{14}$，剩下 $\frac{1}{14}$；小英喝 $\frac{9}{10}$，剩下 $\frac{1}{10}$。那個 $\frac{1}{14}$ 比 $\frac{1}{10}$ 小；所以 $\frac{13}{14}$ 比較大。

教學後，MA2 的邏輯思考很清楚地顯示他的分數迷思概念已被矯正，而且能夠以 1 為參考點，意義化地轉化為較容易判斷的方式以決定合理的答案，而不再侷限於通分的方式或忽略了分子與分母之關聯性。

教學前存在分數稠密性的迷思

(MA2 教學前之訪談 89/09/07)

R：在 $\frac{3}{7}$ 和 $\frac{4}{7}$ 之間有多少個分數？

(1) 0 個 (2) 1 個 (3) 9 個 (4) 10 個 (5) 無限多個。

MA2：0 個

R：為什麼？

MA2：[停頓片刻！] 嗯！因為在 $\frac{3}{7}$ 和 $\frac{4}{7}$ 之間，我找不到數字。

此種分數稠密性的迷思概念，普遍存在於許多學生的觀念中 (楊德清, 2000b; Markovits & Sowder, 1994)。

教學後能夠以擴分的方法認知分數的稠密性

(MA2 教學後訪談 90/01/20)

R：在 $\frac{3}{11}$ 和 $\frac{4}{11}$ 之間有多少個分數？

(1) 0 (2) 1 (3) 9 (4) 10 (5) 無限多個

MA2：無限多個。

R：為什麼？請解釋你的理由。

MA2：因為 $\frac{3}{11}$ 和 $\frac{4}{11}$ 可以一直擴分。

R：如何擴分？請舉一些例子告訴我。

MA2：$\frac{3}{11}$ 可以擴分為 $\frac{6}{22}$，$\frac{4}{11}=\frac{8}{22}$，這樣裡面就有一個 $\frac{7}{22}$。

R：然後呢？

MA2：擴分得越大，裡面的數字就會越多個。

R：可不可以再舉一些例子？

MA2：$\frac{3}{11}$ 可以擴分為 $\frac{30}{110}$，$\frac{4}{11}=\frac{40}{110}$，那麼 $\frac{31}{110}$，$\frac{32}{110}$，……，$\frac{39}{110}$ 就在 $\frac{3}{11}$ 和，$\frac{4}{11}$ 之間了。

教學後，很明顯的 MA2 已經知道兩分數間存在無限多的分數，而且可以使用不斷擴分的方法尋找它們之間的分數；同時亦可發現其在回答問題時信心十足，不像之前的猶豫與不肯定。

(二)教學前、後發展參考點能力之改變

教學前完全沒有呈現使用參考點的能力

MA2 在回答教學前訪談問題時，使用通分的方式、錯誤的解釋、或猜測的方式，完全沒有使用數字常識的策略--參考點的能力呈現。例如：

(MA2 教學前之訪談 90/09/07)

R：請估計 $\frac{8}{9}+\frac{6}{7}$ 的答案大約是多少？

(1) 1 (2) 2 (3) 14 (4) 16

(5) 沒有計算無法知道答案。

MA2：(3) 14

R：為什麼？
MA2：因為8＋6＝14。
R：然後呢？
MA2：嗯！......[沉默良久！] ....[無法回答！]
或
R：不需要計算，請估計$\frac{21}{32}\times\frac{7}{16}$的答案大約是多少？
(1)大於 $\frac{1}{2}$ (2)等於 $\frac{1}{2}$ (3)小於 $\frac{1}{2}$ (4)沒有計算無法知道答案
MA2：(3)小於 $\frac{1}{2}$。
R：請解釋你的理由？
MA2：分子比分母小。
R：然後呢？
MA2：..............，[久久無法回答！]，不知道！用猜的。

雖然對小六的學生而言，數學課室裡已做了許多異分母分數的加法與分數乘法的問題，但卻習慣性地使用紙筆算則的方式：通分再計算分子之和或分母乘分母與分子乘分子以解決這些問題，卻往往是知其然而不知其所以然。雖精於計算、熟練公式，卻無法有意義化其學習的內涵，亦不瞭解所學為何？因此當碰到非例行性的問題時，往往不知所措(楊德清, 2000a, 2000b; Carpenter, *et al.*, 1982; Reys & Yang, 1998)。MA2 的數學概念即明顯地顯現了這些問題之癥結所在。

教學後能夠選擇適當的參考點以處理數學問題

** (MA2 教學後訪談 90/01/20)**

R：請估計 $\frac{12}{13}+\frac{15}{16}$ 的答案大約是多少？
(1) 1 (2) 2 (3) 14 (4) 16 (5)沒有計算無法知道答案。
MA2：因為我把$\frac{12}{13}$當作1，因為$\frac{12}{13}$接近1，$\frac{15}{16}$也很接近1；所以我把它們都當作1加起來，就是2。
或
R：不需要計算，請估計$\frac{8}{17}\times\frac{19}{25}$的答案大約是多少？
(1)大於 $\frac{1}{2}$ (2)等於 $\frac{1}{2}$ (3)小於 $\frac{1}{2}$ (4)有計算無法知道答案
MA2：小於 $\frac{1}{2}$。
R：為什麼？說說看。
MA2：真分數乘以真分數會越乘越小。因為$\frac{8}{17}$沒有超過 $\frac{1}{2}$，如果乘以真分數，一定不會大於 $\frac{1}{2}$。

我們可以發現在教學後 MA2 很有信心地而且很肯定地發展且運用 1 或$\frac{1}{2}$為參考點以解決問題；而不再依賴計算法則或猜測的方式回答問題。MA2 在運用參考點的能力呈現顯著成長是無庸置疑的。

(三)估算能力的改變

對台灣學生而言，由於我們的教育強調計算能力與速度，並不重視估算策略的培養，因此多數的學生的並沒有發展估算的能力，學生的解題方式無法脫離傳統算則的藩籬；日本的情況亦是與我們相同（Reys 等, 1991）。MA2 即是一個很明顯的例子，在教學前他必須依賴計算方式才能決定答案；當缺乏計算工具時，如陷入迷霧中，不知如何是好？例如：

教學前缺乏估算的能力

** (MA2 教學前之訪談 90/09/07)**

R：小華用計算器求得400.14 ÷ 85.5 = 468，但漏掉了小數點的位置，請用估計的方法幫他找出正確的答案：

(1) 0.468 (2) 4.68 (3) 46.8 (4) 468

(5)沒有計算無法找出正確的答案

MA2：*[微笑！] (5)沒有計算無法找出正確的答案。*

從上述的訪談中可以發現 MA2 完全沒有估算的能力，在缺乏計算工具的當兒，即顯得無所適從，不知如何是好？

教學後能夠使用估算的策略

** (MA2 教學後訪談 90/01/20)**

R：***小華用計算器求得*** $400.14 \div 85.5 = 468$，***但漏掉了小數點的位置，請用估計的方法幫他找出正確的答案：***

(1)0.468(2)4.68 (3)46.8 (4)468

(5)沒有計算無法找出正確的答案

MA2：***第二個。***

R：***為什麼？***

MA2：***我把*** *400.14* ***當作*** *400*，*85.5* ***當作*** *85*，***嗯*** $400 \div 85$ ***差不多是十以內，所以答案是*** *(2)4.68* ***吧！***

MA2 在教學後回答估算之問題時，已呈現使用適當估算的策略，在估計之前能選擇適當的值，以方便於估算的進行，同時能夠判斷答案的合理性。MA2 之估算能力已有成長。

三、LA2 在教學前、後數字常識能力之改變

教學前之訪談 LA2 並沒有呈現數字常識的能力，而且有超過 60% 的回答是錯誤的，同時LA2於回答訪談問題時表現出一籌莫展，常常回答：「我不知道」。然而教學後，LA2 的數字常識能力顯著提升，12 題的訪談問題中有 10 題使用數字常識的方法回答問題。LA2 的思考、解釋理由的方式比教學前有相當程度的進步。以下是 LA2 在教學前、後之訪談實錄摘要：

(一)比較數字大小能力的改變

教學前對分數意義、比較分數大小與稠密性具迷思概念

** (LA2 教學前訪談 89/09/06) **

R：***請問你*** $\frac{5}{6}$ ***和*** $\frac{8}{9}$ ***那一個比較大呢？***

LA2：$\frac{5}{6}$ ***比較大。***

R：***為什麼呢？***

LA2：***我覺得要用通分的方法。***

R：***那你怎麼知道*** $\frac{5}{6}$ ***比較大呢？***

LA2：***嗯……….，想不出來，[無法回答！]***

從 LA2 的回答中可以確認 LA2 受傳統算則的侷限，嘗試使用通分的方法、對分數概念的錯誤認知、或嘗試將分數化為小數，以至於無法比較分數大小，具分數及分數稠密性之迷思概念，此與先前的研究（楊德清，2000b; Markovits & Sowder, 1994）相似。

教學後已具比較分數大小的能力

** (LA2 教學後訪談 90/01/17)**

LA2：$\frac{13}{14}$ ***較大。***

R：***為什麼？***

LA2：***因為*** $1-\frac{13}{14}$ ***等於*** $\frac{1}{14}$，***而且*** $1-\frac{9}{10}$ ***等於*** $\frac{1}{10}$，$\frac{1}{10}$ ***大於*** $\frac{1}{14}$，***所以*** $\frac{13}{14}$ ***比*** $\frac{9}{10}$ ***大。***

教學後 LA2 明顯地發展了比較分數大小之能力，而不再依賴傳統計算法則。LA2 在比較數字大小的能力顯著成長。

(二)參考點能力的改變

教學前依賴計算工具而無法運用參考點的方式解題

** (LA2 教學前訪談 89/09/06)**

R：***下列哪一個分數的和大於*** *1*？

(1) $\frac{2}{5}+\frac{3}{7}$ *(2)* $\frac{1}{2}+\frac{4}{9}$ *(3)* $\frac{3}{8}+\frac{2}{11}$

(4) $\frac{4}{7}+\frac{1}{2}$ ？

LA2：*我需要用計算的方式，把他們變成同分母*。

R：*還有沒有其他判斷的方法？*

LA2：*不知道！*

紙筆計算法則深深的影響了 LA2 的思考方向與解題模式，在缺乏計算工具的情況下要求 LA2 去解決問題，LA2 顯現的是缺乏信心，無所適從。

教學後能夠運用參考點

** (LA2 教學後訪談 90/01/17)**

R：*下列哪一個分數的和大於 1？*

(1) $\frac{5}{9}+\frac{1}{2}$ (2) $\frac{3}{8}+\frac{2}{5}$ (3) $\frac{5}{12}+\frac{3}{8}$

(4) $\frac{3}{7}+\frac{1}{2}$ ？

LA2：*第一組*。

R：*你是用什麼方式這麼快就看出來？*

LA2：*因為* $\frac{1}{2}$ *剛好一半嘛，這個* $\frac{5}{9}$ *已經超過一半了啊！*

R：*超過什麼一半？*

LA2：*超過* $\frac{9}{9}$ *的一半，*$\frac{4.5}{9}$。

從上述的對話中可以發現，LA2 已能夠發展運用適當參考點（如 1/2 或 1）的能力，以利於問題的解決。LA2 在運用參考點的能力較以往進步許多。而且 LA2 之前認為分數不能包含小數，現在則已具備了分數之中亦可有小數之概念，例如：$\frac{9}{9}$的一半，$\frac{4.5}{9}$。雖然小學教科書中並沒有討論此種概念，但經由適當的引導亦可幫助兒童從學習中建立新概念。誠如 NCTM（2000）之 PSSM 所主張「教師不應該低估兒童的學習能力」(p. 79).

(三)估計能力的成長

教學前不具估算的能力

** (LA2 教學前之訪談 89/09/06)**

R：*小明用計算器，計算器就是計算機，求得 534.6×0.545=291357，但漏掉了小數點的位置，請用估計的方法幫他找出正確的答案：*

(1)2.91357 (2)29.1357 (3)291.357 (4)2913.57

(5)沒有計算無法找出答案。

LA2：*第四個答案（2913.57）*。

R：*為什麼呢？*

LA2：*因為算小數前面這裡有 1 個（534.6），這裡有 3 個（0.545），相乘就等於有 4 個*。

R：*那你怎麼判斷答案是(4)？*

LA2：*小數點前面有幾個就幾個數字*。

R：*你是怎樣知道這個方法的？*

LA2: *老師教的啊！五年級的老師教的啊！*

LA2 根據傳統計算方法：被乘數及乘數小數點後面的位數相加，以判斷乘積小數點的正確位置，但是誤解了判斷小數點的正確位置(LA2 錯誤的認為小數點的正確位置是從左至右計數)。很明顯的傳統算則妨礙其自由思考的模式，同時產生了錯誤的位值概念。

教學後已能彈性地運用估算策略及判斷結果的合理性

** (LA2 教學後訪談 90/01/17)**

R：*小華用計算器求得 400.14 ÷ 85.5 = 468，但漏掉了小數點的位置，請用估計的方法幫他找出正確的答案：*

(1) 0.468 (2) 4.68 (3) 46.8 (4) 468

(5)沒有計算無法找出正確的答案

LA2：*如果把 400.14 當作 400 就好，85.5 當作 85。然後因為 85×4，大概就到 400 了啊！所以 4.68 就是答案了！*

或

R：*請使用估算的方法，估計* $60\frac{1}{11}\times 39.1$ *的乘積約為下列何數？*

(1) 240 (2) 2400 (3) 24000

(4)沒有計算無法找出答案

LA2：*第二個，2400*。

R：*為什麼是 2400 呢？*

LA2：因為 60×39 就超過 1000 了啊，這一個答案 (1) 240 太小了啊！啊第三個答案 24000 超過萬也太大了啊！所以這個 2400 就是答案了。

從上述的回答中，我們可以很清楚的發現 LA2 在教學後已經能夠靈活地運用估算策略的能力，而且彈性地發展判斷答案合理性的能力。

由上述教學前、後訪談資料之分析與明顯之對照，可以發現學生在經由數字常識教學活動融入數學課室中，同時教師創造良好之學習情境以提供學生辯證、質疑、提問之機會，並且鼓勵兒童勇於參與課室討論、溝通、分享解題經驗，兒童之數字常識能力有顯著的成長。

伍、結論與建議

一、結論

雖然本數字常識教學實驗只持續進行一個學期，然而學生數字常識能力的成長，數字概念的蛻變，思考能力的提升卻是顯著的。數字常識紙筆測驗提供我們瞭解整體學生經過教學活動後，其對數概念之理解能力的精進；而訪談更幫助我們去深入的探究學生在教學前、後之數字常識能力的顯著差異，以及思考與推理能力之改變。雖然本研究只侷限於二個班級 70 位小六學生，廣泛的推論仍須謹慎，然而本研究結果卻提供我們一些很重要與具教育意義之啟示與發現：

1.紙筆測驗結果顯示，二班學生在教學前、後，T-考驗皆有顯著差異性存在($p < 0.01$)，顯示數字常識教學對這些學生有極正面的效果。而保留測驗結果表示學生之數字常識概念是有意義的與理解的學習。

2.研究結果顯示接受訪談之 A 校小六學生（不論低、中、高）在教後已發展運用數字常識的策略。例如：教學後學生已經能夠彈性地運用參考點，如 1 或 $\frac{1}{2}$ 以處理問題，對分數的概念具有較深入的理解、能夠以意義化的方式比較分數之大小，了解運算對數字之相對的影響，同時發展估算的策略以靈活地解決問題。本教學實驗之結果與 Markovits 和 Sowder (1994) 之研究結果一致，同時支持他們的論點："The changes made by students in electing to use strategies that can be said to reflect number sense were quite apparent on postinstructional measures" (p. 22).

對 B 校學生而言，低、中、高程度學童表現各有不同。中、高程度學生在教學後數字常識策略之使用亦有顯著之成長；然而低程度學童則沒有改變。

3.雖然本教學實驗與 Markovits 和 Sowder (1994) 之研究結果相呼應，但亦發現有不同的地方；例如：Markovits 和 Sowder (1994) 在教學活動後發現學生對於分數稠密性之理解程度較教學前好（亦即教學後大部分的學生知道分數間具無限多的分數），但當要求學生找出兩分數之間的分數時，依然有其困難性，他們認為原因之一可能是由於學生習慣於傳統算則的方式，嘗試將分數轉化為小數，由於無法除盡（例如：欲找 $\frac{2}{7}$ 與 $\frac{3}{7}$ 之間的分數，學生往往習慣於將 $\frac{2}{7}$ 化為小數，但由於 2 除以 7 無法除進），以致學生產生疑惑與困擾，而不知如何是好？因此妨礙了他們對分數稠密性的認知。

然而本研究的結果卻發現我國小六學生在教學後皆能夠運用擴分的方式，以找出兩分數間的分數。很特別的是訪談發現小六學生普遍將分母擴為 10 的倍數，例如將 $\frac{3}{7}$ 和 $\frac{4}{7}$ 化為 $\frac{30}{70}$ 和 $\frac{40}{70}$、$\frac{300}{700}$ 和 $\frac{400}{700}$ 等等，以決定它們之間的分數，但沒有小六學生在教學後與國外的

學生嘗試將分數化為小數之情形發生。

4.研究結果發現教學後之訪談問題 7：

小明用計算器求得 49.05 × 6.044 = 2964582，但漏掉了小數點的位置，請用估計的方法幫他找出正確的答案：

(1) 2.964582 (2) 29.64582 (3) 296.4582

(4) 2964.582 (5) 沒有計算無法找出

是所有問題中表現最差的；只有 4 位（HA2, HB1, HB2, MB2）學生使用數字常識的策略回答問題[教學前沒有一位學生使用數字常識策略回答問題]，4 位學生仍然使用算則的方式，「這個有 2 位小數，這個有 3 位小數，所以共有 5 位小數，但是 5 × 4 = 20 嘛，剛好遺漏一個啊！」雖然不是使用數字常識策略，但是比教學前較好的地方乃在於會多考慮解題所需條件。探究其原因，可能是這些學生對此類之問題已習慣算則方式，因此欲在短期內改變其思考方式是不容易的。

5.在教學前之訪談，受訪之低、中、高程度學生皆非常傾向於使用傳統算則的方式回答問題（約 80%），教學後使用算則之比率約為(12%)，由於過度的習慣於與紙筆計算的方式，以致於使他們的思考範疇受侷限，例如：當他們被要求去估算 $\frac{12}{13}+\frac{15}{16}$ 或 $\frac{21}{32}\times\frac{7}{16}$ 之值時，他們所想到的方法就是利用通分或分子乘分子與分母乘分母以求解，或者說"這個計算太複雜了，我需要用筆，否則無法計算"，解題模式無法脫離算則的巢臼。然而在教學後，受訪學生已能夠彈性地運用數字常識的策略以解決問題（約 74%），教學前使用數字常識策略之比率約為 5%。

6.低（B 校低程度學生例外）與中程度之學生在教學前，面對非學校所教授之例行性問題時，往往缺乏信心，不知如何是好？例如：低與中程度之學生當回答教學前訪談問題時，常回答："我不知道"。然而教學後此種說明已不復見，而且這些學生較願意嘗試去解釋他們的想法，與訪談者分享他們的解題方法，同時回答問題時亦較具信心。

7.設計良好之數字常識教學活動對教學成效之好或壞佔極重要之地位，本教學實驗所設計之教學單元與傳統之數學強調算則教學之課程內容是相當不同的。傳統之數學課室重視記憶原理、背誦數學公式，強調計算能力與速度之訓練，例如：當比較分數大小或求異分母之兩分數和時，教科書通常教導學生先通分再比較分子之大小或通分求分子之和(Markovits & Sowder, 1994; Sowder, 1992a)。當要求學生去找出小數點之位置時，教科書通常告訴學生計數乘數與被乘數之小數點之和，此即為乘積小數點之位數。許多的研究已證實此種背誦公式，使用算則之方式對學生之數學學習是無意義的，而且無助於數字常識之發展(楊德清, 2000b; Cai, 2001; Kamii, 1994; Markovits & Sodwer, 1994; Reys & Yang, 1998)。本教學實驗所設計之數字常識教學活動，強調的是有意義的學習數字概念，經由探索、溝通、辯證、質疑、與分享解題經驗之互動式學習情境下，教師鼓勵學生思考，進而幫助兒童發展數字常識的能力。這是本數字常識教學活動與傳統之教學內容不同之處。

8.保留概念測驗與訪談結果顯示，學生的數字常識學習保留成效相當好，此乃緣由於學生理解學習的內涵，方能使概念持久。

本教學實驗之結果證實在設計良好之數字常識教學活動與教師創造與鼓勵學生熱衷於探索、溝通、討論、思考、與勇於分享解題經驗之課室互動學習情境下，兒童的數字常識能力能夠被孕育和成長。

二、建議

數字常識已受國際間數學教育界所重視而且被視為重要的數學主題。長久以來，許多的研究持續地證實了學校數學若只強調算則與公式的學習，往往會誤導了數學概念的學習，甚

至產生許多的迷思概念。特別是台灣學生在國際間的數學成就測驗往往名列前矛，尤其是計算能力的優異表現(Gonzales, *et al*., 2000; Stevenson, Chen, & Lee, 1993; Stevenson, Lee, & Stigler, 1986; Stigler, Lee, & Stevenson, 1991)，然而這些優異的成就並沒有伴隨著數字常識能力的發展（楊德清，2000b; Reys, & Yang, 1998)。Cai (2001)的研究發現亦建議我們必須以更具思考的方式檢定國際間數學成就之差異，而不是過分的強調國際間的排名。雖然本研究只是開端，然而顯著的結果卻鼓勵與支持未來更多的研究。

強烈要求教育改革、教學創新、與課程適應新潮流的呼聲（包括了數學教育）正如潮水般奔騰而來，然而 21 世紀強調生活化與有意義的學習數學之數學教育新主流–數字常識融入我們的新課程中，是必要的。如果欲讓我國之數學教育改革更臻完備，則數字常識的教學應為小學數與計算主題之中心，亦應貫穿整個小學之數學課程。本研究之結果顯示經由設計良好之教學活動兒童之數字常識可被逐漸地發展。同時本研究亦可以鼓勵更多的教師以更有意義的方式引導學生學習數與計算之精髓，而不再過度強調傳統算則的教學。研究者希望本研究能對目前國內正如火如荼進行之教育改革與數學課程設計有所助益。

誌　　謝

本研究蒙國科會專題計畫補助，計畫編號 NSC 89-2511-S-415-001，特誌申謝；文中所提論點純屬作者個人之意見，並不代表國科會立場。

作者衷心感謝審查委員對本文所提供之寶貴意見，由於您們的協助，方能使本文能夠以更清楚、更結構化的方式呈現。並由衷的感謝兩位國小教師徐俊仁老師和黃明章老師的參與本研究計畫，由於你們的協助方能使本研究得以順利完成。

參考文獻

1. 楊德清（1997）：數學教育中目前大眾所關切之一個主題 – 數字常識。科學教育月刊，**200**, 12-18。
2. 楊德清（2000a）：數字常識與筆算能力。教師之友, 41(2), 30-35。
3. 楊德清（2000b）：國小六年級學生回答數字常識問題所使用之方法。科學教育學刊，**8**(4), 379-394。
4. 楊德清（2000c）：數字常識評量問題之發展與設計。教育部科技顧問室 89 年度補助研究計畫之部分。
5. 徐俊仁和楊德清（2000）：從數字常識的觀點探討九年一貫數學學習領域「數與計算」的能力指標。科學教育研究與發展季刊，**21**, 56-67.
6. Alitzer-Tuning, C. (1984). One point of view: crisis in arithmetic teaching: The future is here. *Arithmetic Teacher, 32*, 2.
7. Australian Education Council (1991). *A national statement on mathematics for Australian schools*. Melbourne: Curriculum Corporation.
8. Behr, M. J., Wachsmuth, I., Post, T. R., & Lesh, R. (1984). Order and equivalence of rational numbers: A clinical teaching experiment. *Journal for Research in Mathematics Education*, *15*, 323-341.
9. Bezuk, N., & Cramer, K. (1989). Teaching about fractions: What, when, and how? In P. R. Trafton and A. B. Shult (Eds.), *New directions for elementary school mathematics* (pp. 156-167), 1989 Yearbook of NCTM, Reston, VA: NCTM.

10. Brownell, W. A. (1935). Psychological considerations in the learning and the teaching of Arithmetic. In Reeve (Ed.), *The teaching of arithmetic*, (pp. 19-51). Reston, VA: NCTM.

11. Burns, M. (1994). Arithmetic: The Last holdout. *Phi Delta Kappen*, *1*, 471-476.

12. Cai, Jinfa (2001). Improving mathematics learning: Lessons from cross-national studies of Chinese and U.S. students, *Phi Delta Kappan*, *2*, 400-404.

13. Capenter, T. P., Corbbit, M. K., Kepner, H. S. Jr., Lindquist, M. M., & Reys, R. E. (1982). An interpretation of the results of the second NAEP mathematics assessment. In S. Hill (Ed.), *Education in the 80's: Mathematics* (pp. 24-35). Washington, DC: National Education Association.

14. Cobb, P., Wood, T., Yackel, E., Nicholls, J., Wheatly, G., Trigatti, B., & Perlwitz, M. (1991). Assessment of a problem-centered second-grade mathematics project. *Journal for Research in Mathematics Education*, *22*(1), 3-29.

15. Cockcroft, W. H. (1982). *Math Counts*. London: Her Majesty's Stationery office.

16. Emanuelsson, G., & Johansson, B. (1996). *Kommentarer till kursplan I matematik, Lpo 94*. (Nn-statutory guidance to the ne Swedish curriculum of mathematics).

17. Fraivillig, J. (2001). Strategies for advancing children's mathematical thinking. *Teaching Children Mathematics*, 454-459.

18. Gonzales, P., Calsyn, C., Jocelyn, L., Mark, K., Kastberg, D., Arafeh, S., Williams, T. & Tsen, W. (2000). Highlights from TIMSS-R http://nces.ed.gov/pubsearch/pubsinfo.asp? pubid = 2001027

19. Greeno, J. G. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for Research in Mathematics Education*, *22*, 170-218.

20. Hibert, J. (1984). Children's mathematics learning: The struggle to link form and Understanding. *Elementary School Journal*, *84*, 496-513.

21. Hiebert, J. (1989). Reflections after the conference on number sense. In J. T. Sowder & B. P. Schappelle (Eds.), *Establishing foundations for research on number sense and related topics: Report of a conference* (pp.82-84). San Diego: San Diego University, Center for Research in Mathematics and Science Education.

22. Howden, H. (1989). Teaching number sense. *Arithmetic Teacher*, *36*: 6-11.

23. Japanese Ministry of Education. (1989). *Curriculum of mathematics for the elementary school*. Tokyo: Printing Bureau.

24. Jarvis, C. H., ＆ Blank, B. B. (1989). *Great starts mathematics approach* 1987-88.（ERIC Document Reproduction Service No. ED316339）

25. Kamii, C. (1989). *Young children continue to reinvent arithmetic, second grades: Implications of Piaget's theory*. New York: Teachers College Press.

26. Kamii, C. (1994). *Young children continue to reinvent arithmetic, Third grade*. New York: Teachers College Press.

27. Kerslake, D. (1986). *Fractions: Children's strategies and errors: A report of the strategies and errors in secondary mathematics project*. Windsor, England: NFER-Nelson.

28. Markovits, Z., & Sowder J. T. (1994). Developing number sense: An Intervention study in grade 7. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(1), 4-29.

29. McIntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992).

A proposed framework for examining Basic number sense. *For the Learning of Mathematics*, *12*(3),2-8.

30. McIntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1997). *Number sense grades 6-8*, Palo Alto: Dale Seymour Publications.
31. McIntosh, A., Reys, B. J., Reys, R. E., Bana, J., Farrel, B. (1997). *Number sense in school mathematics: Student performance in four countries*, Mathematics, Science, & Technology Education Centre, Edith Cowan University.
32. National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.
33. National Council of Teachers of Mathematics (2000). *The Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.
34. National Research Council (1989). *Everybody Counts. A report to the nation on the future of mathematics education*. Washington, DC: National Academy Press.
35. Owens, D. T., & Super, D. B. (1993). Teaching and learning decimal fractions. In D. T. Owens (Ed.), *Research ideas for the classroom in middle grades mathematics* (pp.137-158). Reston, VA: NCTM.
36. Plunkett, S. (1979). Decomposition and all that rot. *Mathematics in Schools*, *8*: 2-5.
37. Resnick, L. B. (1989). Defining, assessing and teaching number sense. In Sowder & Schappelle (Eds.), *Establishing foundations for research on number sense and related topics: Report of a conference*. San Diego, CA: San Diego State University, Center for Research in Mathematics and Science Education.
38. Reys, B. J. (1994). Promoting number sense in middle grades. *Teaching Mathematics in the Middle School*, *1*(2), 114-120.
39. Reys, B. J., Barger, R., Dougherty, B., Hope, J., Markovits, Z., Parnas, A., Reehm, S., Sturdevant, R., Weber, M., & Bruckheimer, M. (1991). *Developing number sense in the middle grades*, Reston, VA: NCTM.
40. Reys, R. E., Reys, B. J, McIntosh, A., Emanuelsson G., Johansson, B., & Yang, D. C. (1999). Assessing Number Sense of Students in Australia, Sweden, Taiwan and the United States. *School Science and Mathematics*, *99*(2), 61-70.
41. Reys, R. E., Reys, B. J., Nohda, N. Ishidda, J., Yoshikawa, S., & Shimizu, K. (1991). Computational estimation performance and strategies used by fifth- and eighth-grade Japanese students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *22*(1), 39-58.
42. Reys, R. E., & Yang, D. C. (1998). Relationship between Computational Performance and Number Sense among Sixth- and Eighth-Grade Students in Taiwan, *Journal for Research in Mathematics Education*, *29*, 225-237.
43. Sowder, J. (1992a). Estimation and number sense, in D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 371-389). New York: Macmillan.
44. Sowder, J. (1992b). Making sense of numbers in school mathematics. In G. Leinhardt, R. & R. Hattrup (Eds.), *Analysis of Arithmetic for Mathematics Teaching* (pp. 1-51). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
45. Sowder, J. T., & Schappelle, B. P. (Eds.) (1989). *Establishing foundations for research on number sense and related topics: Report of a conference*. San Diego, CA: San Diego State University, Center for Research in Mathematics and Science Education.

46. Stevenson, H. W., Chen, C., & Lee, S. Y. (1993). Mathematical achievement of Chinese, Japanese, & American children: Ten years later, *Science*, *259*, 53-58.
47. Stevenson, H. W., Lee, S. Y., & Stigler, J. W. (1986). Mathematical achievement of Chinese, Japanese, and American children, *Science*, *231*, 693-99.
48. Stigler, J. W., Lee, S. Y., & Stevenson, H. W. (1991). *Mathematical knowledge of Japanese, Chinese, and American elementary school children*, Reston, VA: NCTM.
49. Threadgill-Sowder, J. (1984). Computational estimation procedures of school children. *Journal of Educational Research*, *77*, 332-336.
50. Treffers, A. (1991). Meeting innumeracy at primary school. *Educational Studies in Mathematics*, *26*(1), 333-352.
51. Warrington, M. A., & Kamii, C. (1998). Multiplication with Fractions: A Piagetian, Constructivist Approach, *Mathematics Teaching in the Middle School*, *3*(5), 339-343.
52. Wright, R. J. (1994). A study of the numerical development of 5-year-olds and 6-year-olds. *Educational Studies in Mathematics*, *26*(1), 25-44.
53. Yang, D. C. (1995). *Number sense performance and strategies possessed by sixth and eighth grade students in Taiwan*. Doctoral dissertation, University of Missouri: Columbia, Dissertation Abstracts International, *57*, 3865A.
54. Yang, D. C. (2002). Teaching and Learning number sense: one successful process-oriented activity with six grade students in Taiwan, *School Science and Mathematics Journal, 102* (4),152-157. (NSC 89-2511-S-415-001)
55. Yang, D. C., & Reys, R. E. (2001a). Developing Number Sense. *Mathematics Teaching, 176*, 39-41. (NSC 89-2511-S-415-001)
56. Yang, D. C., & Reys, R. E. (2001b). One Fraction Problem: Many Solution Paths. *Mathematics Teaching in the Middle School*. 7(3), 164-166. (NSC 89-2511-S-415-001)

A Study of Sixth Grade Students' Development of Number Sense Through Well-Designed Number Sense Activities

Der-Ching Yang
National Chiayi University

Abstract

Two 6th grade classes from two public schools in south Taiwan participated in this experimental study. The Posttest and Retention test results revealed that students' number sense performance significantly improved ($p < 0.01$) after instruction. The results of Retention tests also indicated that these students' learning was meaningful. Interviews with 12 students revealed that many students did not have any ideas or tended to use standard written algorithms. Few number sense strategies were found before instruction. However, after instruction few rule-based methods were found and students' responses reflected number sense strategies, such as number magnitude, benchmarks, and estimation were observed..

Key words: Number Magnitude, Benchmark, Estimation, Teaching Number Sense.